CONCOURS D'ADMISSION A L'ESM DE SAINT-CYR EN 1993

MATHÉMATIQUES II

Options M-P

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction, ainsi que de la présentation.

Il sera fourni une feuille de papier millimétré à chaque candidat.

L'espace affine euclidien de dimension trois est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a désigne un réel strictement positif fixé.

I - ÉTUDE DE L'ASTROÏDE

Soit (C) la courbe du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ décrite par le point M (t) de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 8a\cos^3 t \\ y = 8a\sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

1 - *a)* Déterminer les axes de symétrie de la courbe (C).

b) Étudier et construire la courbe (C). On précisera la nature des points singuliers et les tangentes en ces points.

c) Calculer la longueur totale de (C).

d) Calculer l'aire du domaine plan enfermé par (C).

2 - *a)* Écrire une équation de la droite D (t) tangente en M (t) à (C).

b) Soit A (t) et B (t) les points d'intersection avec les axes de coordonnées de la tangente D (t) à (C) en un point régulier M (t). Que peut-on dire de la longueur A (t) B (t) ?

3 - Soit P_0 le point du cercle de centre O et de rayon $4a$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OP_0}) = t_0$, $t_0 \in [-\pi, \pi]$.

a) Montrer que par P_0 il passe en général quatre tangentes à (C). Montrer que trois de ces tangentes font entre elles deux à deux des angles égaux. Que peut-on dire de la quatrième ?

b) Indiquer une construction géométrique de la droite $D(t_0)$ à partir du point P_0.

c) Soit $H(t_0)$ la projection orthogonale de O sur $D(t_0)$. Calculer $\overrightarrow{OH(t_0)} + \overrightarrow{OM(t_0)}$. En déduire une construction géométrique de $M(t_0)$.

4 - *a)* Écrire un système linéaire (S) donnant les coordonnées du point caractéristique de la normale en $M(t)$ à (C).

b) $I(t)$ désignant le centre de courbure en $M(t)$ à (C) et $H(t)$ la projection orthogonale de O sur $D(t)$, comparer $\overrightarrow{M(t)\,I(t)}$ et $\overrightarrow{OH(t)}$.

En déduire une construction géométrique de $I(t)$.

c) En utilisant (S) [voir 4 - *a)*] et un nouveau repère déduit de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une rotation d'angle $\frac{-\pi}{4}$ montrer que la développée de (C) se déduit de (C) par une transformation géométrique simple.

II - DÉVELOPPANTES D'UNE ASTROÏDE

Soit $\Delta(t)$ la famille de droites d'équation :
$x \cos t - y \sin t = p(t)$ où p est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable.

Soit (E) l'enveloppe de la famille de droites Δ.

1 - Déterminer p pour que (C) soit la développée de (E).

Dans la suite on notera (E_μ) l'enveloppe de la famille de droites d'équation :

$$x \cos t - y \sin t = -(4a \sin^2 t + \mu)$$

2 - Déterminer une représentation paramétrique de (E_μ). Montrer que (E_μ) est symétrique par rapport aux axes du repère.

3 - *a)* Déterminer l'ensemble A des valeurs de μ pour lesquelles (E_μ) a des points singuliers. Lorsqu'ils existent, étudier si ce sont des points de rebroussement.

b) Déterminer l'ensemble des points singuliers de toutes les courbes (E_μ) lorsque μ décrit A.

4 - Déterminer pour quelle valeur de μ la courbe (E_μ) a un point de rebroussement pour $t = \frac{\pi}{4}$. Montrer que la courbe (E_μ) se déduit alors de (C) par une similitude que l'on déterminera.

III - ÉTUDE D'UNE SURFACE

Soit (Σ) la surface décrite par le point $M(u, v)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = a(\cos 3u - 3\cos u) + a \sin 2v \cos u \\ y = a(\sin 3u + 3\sin u) + a \sin 2v \sin u \\ z = a(1 - \cos 2v) \end{cases}$$

$u \in [-\pi, \pi]$ et $v \in [0, \pi]$.

1 - *a)* Que peut-on dire des points $M(u, v)$ et $M(-u, v)$?

b) Que peut-on dire des points $M(u, v)$ et $M(\pi - u, v)$?

c) Que peut-on en déduire pour (Σ) ?

2 - Soit v_0 fixé dans $[0, \pi]$. On note Γ_{v_0} la courbe décrite par le point $M(u, v_0)$ lorsque u décrit $[-\pi, \pi]$.

a) Montrer que Γ_{v_0} est une courbe plane.

b) Montrer qu'elle se déduit d'une courbe (E_μ) [voir II] pour une valeur de μ bien choisie. Reconnaître en particulier la courbe Γ_0, correspondant à $v_0 = 0$.

3 - Soit u_0 fixé dans $[-\pi, \pi]$. On note γ_{u_0} la courbe décrite par le point $M(u_0, v)$ lorsque v décrit $[0, \pi]$.

a) Montrer que γ_{u_0} est un cercle. On note $A(u_0)$ le centre de ce cercle.

b) Quel est l'ensemble décrit par $A(u_0)$ lorsque u_0 décrit $[-\pi, \pi]$?

4 - *a)* Montrer que les tangentes en $M(u, v)$ à Γ_v et γ_u sont orthogonales.

b) Montrer que la projection orthogonale de la tangente en $M(u, v)$ à γ_u sur le plan d'équation $z = 0$ est tangente à l'astroïde (C) définie dans I.

5 - *a)* A quelle condition sur u le point $M(u, v)$ est-il un point régulier sur (Σ) ? Cette condition sera supposée réalisée dans la suite.

b) Déterminer alors la normale en $M(u, v)$ à (Σ). Quel est son point d'intersection avec le plan d'équation $z = a$?

c) Montrer que la normale en $M(u, v)$ à (Σ) est tangente au cylindre de section droite l'astroïde (C).